



TITLE:

# 円環内自然対流の非線形振動:室内実験及び1次元モデル(液体中の非線形波動の数理的側面)

AUTHOR(S):

三村, 和男; 須田, 不二夫

---

CITATION:

三村, 和男 ...[et al]. 円環内自然対流の非線形振動:室内実験及び1次元モデル(液体中の非線形波動の数理的側面). 数理解析研究所講究録 1991, 740: 196-207

ISSUE DATE:

1991-01

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/102097>

RIGHT:

# 円環内自然対流の非線形振動（室内実験及び 1 次元モデル）

東海大教養学部 三村 和男 （ Kazuo Mimura ）

東海大教養学部 須田 不二夫 （ Fujio Suda ）

## 「 1 」 目的

伝熱装置としての閉容器内の自然対流は多くの研究があるが、本研究では、非線形力学系のモデルとして、理想化された形状としての円環内の自然対流に注目する。特に、多重平衡解の間の遷移過程を、室内実験とその 1 次元モデルを比較しながら研究した。

## 「 2 」 室内実験装置及び実験方法

実験装置は図 1 に示されるように、鉛直設置された環半径  $R$  が 180mm、管半径  $a$  が 10mm のガラス製トーラス内に作業流体として水（食塩水）が

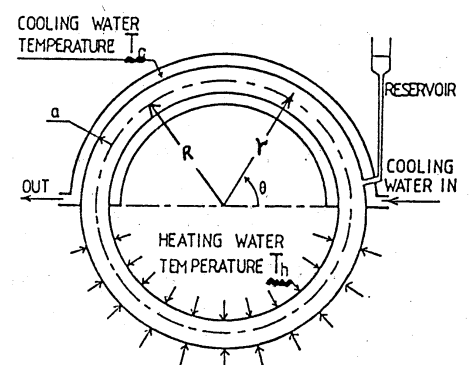


図 1 実験装置の模式図

封入されたものであり、このトーラスの下半分は温度  $T_h$  の温水に浸されてほぼ管壁温度一定の条件で加熱され、上半分

は温度  $T_c$  の流冷水によってほぼ管壁温度一定の条件で冷却される。この加熱部冷却部の温度差  $\Delta T$  をパラメータとして、作業流体の運動を観察した。

温度測定のために、図1の偏角  $\theta = -15^\circ, 90^\circ, 195^\circ, 270^\circ$  の4カ所に管の中心を含む鉛直面内を管半径方向にスライドできる熱電対を取り付けた。以後この方向を  $r$  方向と呼ぶ ( $R-a < r < R+a$ )。上記4カ所における管断面内温度分布を測定し、また上記4カ所の管中心部での温度の時系列を測定した。

速度測定のために、作業流体にはナイロンビーズを浮遊させ、その動きをビデオカメラで撮影した。準定常状態においては、画像解析の手法で、 $\theta = 15^\circ, 135^\circ, 237^\circ, 280^\circ, 320^\circ$  付近の速度分布を求めた。

### 「3」 実験結果

対流パターンは単なる剛体回転的なものではなく、構造を持っている。図2は様々な  $\Delta T$  における、測定された管内無次元温度分布である。対流の向きが時計回りの期間のみについて測

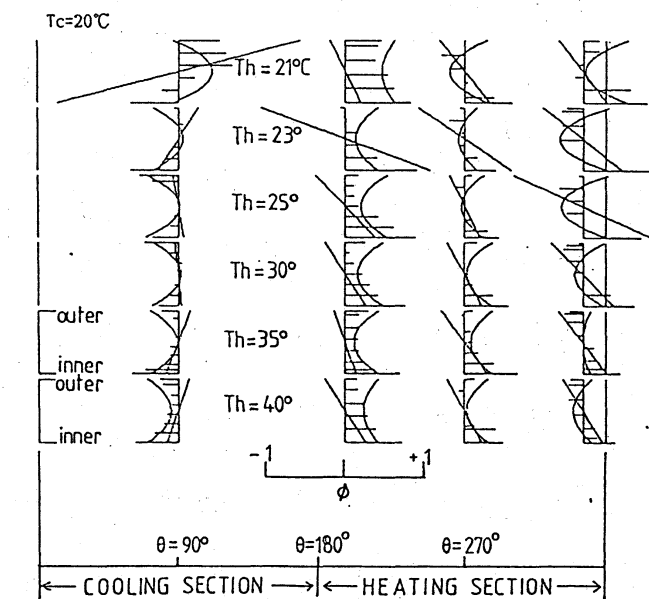


図2 管内温度分布  
様々な  $\Delta T$ ,  $\theta$  において無次元温度 ( $\phi = (T - T_0) / (T_h - T_0)$ ,  $T_0 = (T_h + T_c) / 2$ ) の  $r$  方向分布を示す。

定値は時間平均され、さらに  $r$  の 2 次式でフィッティングして  $r=R$  に対して対称な成分と反対称な成分に分けられている。加熱領域では一般に内壁 ( $r=R-a$ ) 側が外壁 ( $r=R+a$ ) 側より高温であることが解る。

図 3 の上部は  $\Delta T = 5^\circ\text{C}$  における流速の  $\theta$  方向成分の管内分布を示している。図 3 の下部は管断面積を考慮したフィッティングにより  $r=R$

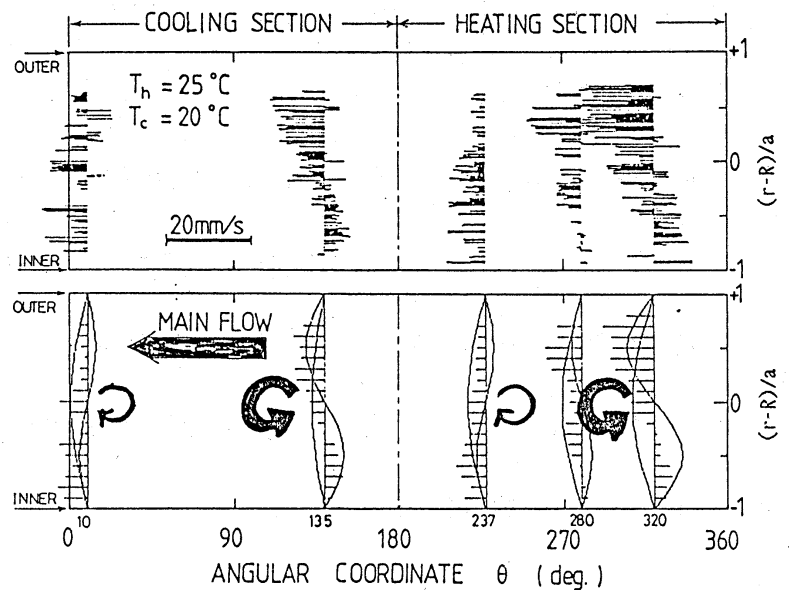


図3 流速の  $\theta$  方向成分の管内分布

に対して対称な

$\cos(\pi(r-R)/2a)$  成分と反対称な  $\sin(\pi(r-R)/a)$  成分に分けられたものである。この対流パターンは以下の 2 つの特徴を持つことが解る。

(1) 対称成分は管内のどこでも符号が同じ (時計回り) でその大きさもほぼ一定である。

(2) 反対称成分は環中心に対して向かい合った 2 つの象限において同じ符号を持ち、第 2 第 4 象限における反対称成分の大きさは第 1 第 3 象限におけるそれよりも大きい。

これら温度分布及び速度分布の特徴から、このトラス内の定常対流パターンは模式的に図4のように表わされる。すなわち、この対流は主流（対称成分）と局所対流（反対称成分）という2種の熱対流パターンが重なったものである、ただし、加熱領域中の上流部分及び冷却領域中の上流部分においては局所対流は顕著であるが一方加熱及び冷却領域中の下流部分においては目立たない。

$\theta$  方向温度分布に注目すると、加熱領域中の最下流部が最も高温で冷却領域中の最下流部が最も低温である。従って、環の水平温度差（ $\theta = 195^\circ$  と  $\theta = 345^\circ$  での管中心部での温度差）の符号が主流の向きを表わすと予想される。

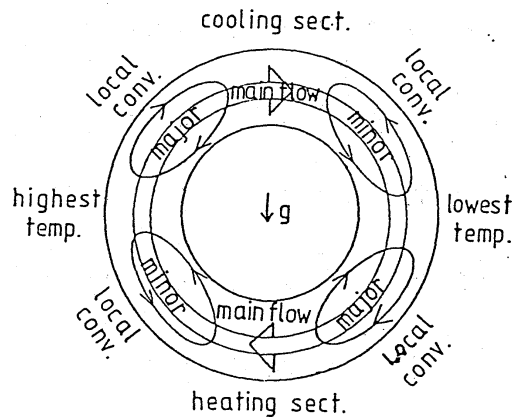


図4 定常対流パターンの模式図

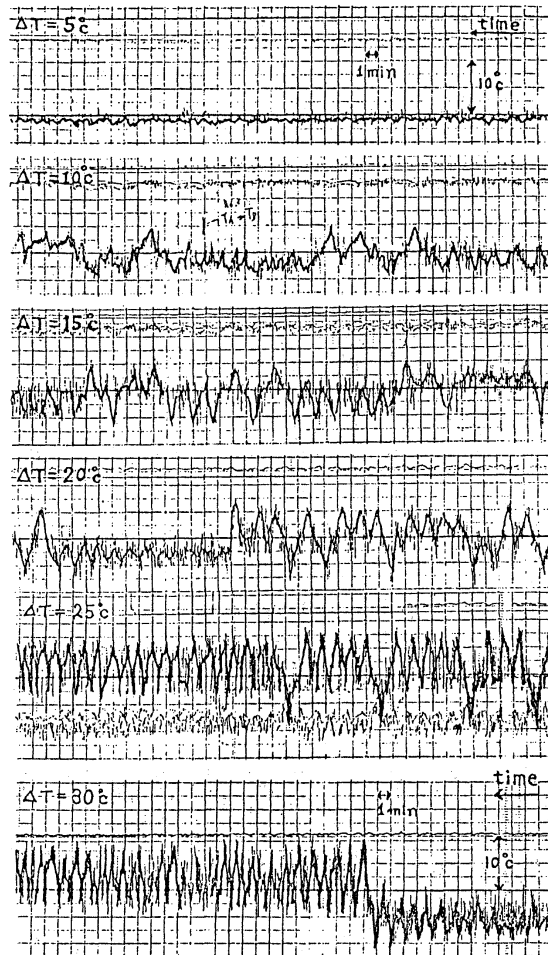


図5 水平温度差（主流の向きに対応）の時系列データ  
時間軸が右から左へ向いていることに注意。

様々な  $\Delta T$  においてこの水平温度差の時系列データの例を図5に示す。上記の予想に従えば、 $1^\circ\text{C} < \Delta T < 10^\circ\text{C}$  の条件下では時計回りあるいは反時計回りのほぼ定常な対流が見られ、その向きは初期条件に依存する。 $10^\circ\text{C} \leq \Delta T \leq 20^\circ\text{C}$  の条件下では、対流の向きが時計回りから反時計回りへあるいはその逆に自発的に変化する。その対流の向きの反転は必ずしも周期的ではなくむしろカオス的にみえる。しかも、 $\Delta T$  が大きい程主流の反転が頻繁に起きる傾向がある。しかしながら、 $25^\circ\text{C} \leq \Delta T$  では主流の脈動は激しいが主流の反転はむしろ抑制されているようにも見える。

#### 「4」 1次元モデル

この実験に現われた主流のカオス的反転の機構を理解するために簡単な1次元モデルを構成した。ブジネスク流体を仮定し、かつ流速  $v^*$  は  $\theta$  方向成分のみを持ち時間 ( $t^*$ ) のみに依存し、温度  $T$  は  $\theta$  及び  $t^*$  のみに依存すると仮定した。分子粘性や  $\theta$  方向熱伝導は考えず、ポアズイユ流を想定した壁面摩擦と壁面加熱冷却を考慮した。

$v(t)$  及び  $\phi(\theta, t)$  を各々無次元の  $\theta$  方向流速及び温度とすると、運動方程式及び熱の式は2つの無次元パラメーターを使って次のように表わされる。

$$dv/dt = -v + 1/\pi \int_0^{2\pi} \phi \cos \theta d\theta \quad (\text{式 1})$$

$$\partial \phi / \partial t = -v \partial \phi / \partial \theta - Np \begin{cases} (\phi + \pi Gr/4) & (0 \leq \theta \leq \pi) \\ (\phi - \pi Gr/4) & (\pi \leq \theta \leq 2\pi) \end{cases} \quad (\text{式 2})$$

ただし 2つの無次元パラメーターは  $Gr = a^4 \beta g (T_h - T_c) / (64 \pi R \nu^2)$ ,  $Np = Nu / (8Pr) = ah / (4 \rho_0 C \nu)$  であり、有次元時間、流速、温度は各々  $t^* = ta^2 / (8\nu)$ ,  $v^* = 8\nu \nu R / a^2$ ,  $T - T_0 = 2\phi (T_h - T_c) / (\pi Gr)$  であたえられる。そして  $\beta, g, \nu, \rho_0, C$  はそれぞれ作業流体の熱膨張率、重力加速度、動粘性係数、平均密度及び比熱である。式1の右辺は壁面摩擦及び浮力、式2の右辺は温度移流及び壁面からの加熱冷却項を表わす。

線形不安定性を調べると、定常解の分岐図は図6のようになり、 $Gr = Np$  で熱伝導解は不安定化し、安定対流解が分岐し、

$Gr = (1 + 4Np) / (1 - 2Np)$  で対流解が不安定化することが解る。

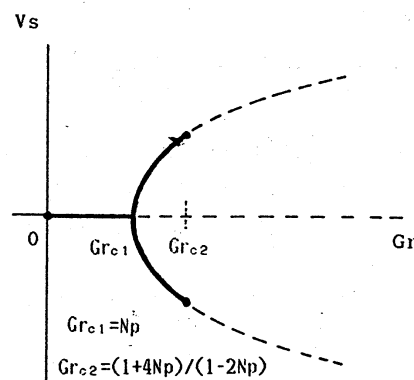


図6 定常解の分岐図

太い実線は安定定常解を破線は不安定定常解を表わす。

また、式 1、2 をスペクトルモデルに書き直してみる。

$$\phi(\theta, t) = \phi_0(t) + \sum \{ \phi_n^c(t) \cos(n\theta) + \phi_n^s(t) \sin(n\theta) \}$$

と展開すると、 $n=1$  において次のような閉じた系をつくる。

$$dX/dt = -X + Y, \quad \text{式 3}$$

$$dY/dt = GrX - NpY - ZX, \quad \text{式 4}$$

$$dZ/dt = -NpZ + XY, \quad \text{式 5}$$

但し、 $X(t)=v$ ,  $Y(t)=\phi_1^c$ ,  $Z(t)=\phi_1^s+Gr$  である。線形不安定性は上記の偏微分モデルと完全に一致する。

こうして得られたレジームダイアグラム上に実験値から得られた  $Gr$ ,  $Np$  をプロットしたのが図 7 である。 $Np$ を得るためには管壁付近の温度勾配を使った、また  $Gr$  はその定義式をさらに 0.4 倍した値を用いると図のように線形論と矛盾しない配置となった。その理由としてはガラス管壁の厚みや現実の対流の 2 次元性などが考えられる。

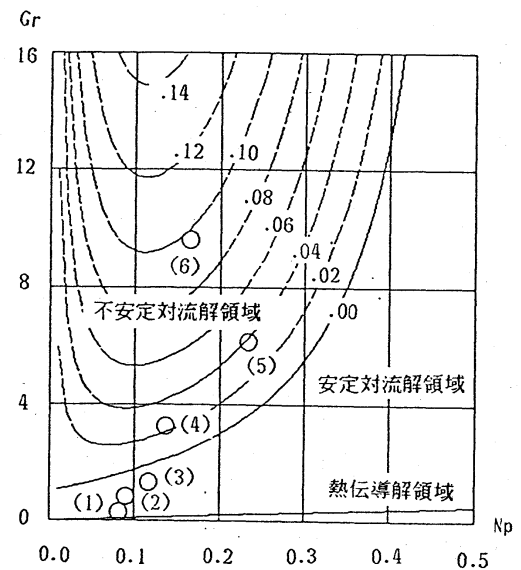


図7  $Gr, Np$  平面上的レジームダイアグラム  
定常対流解に対する線形不安定波動の無次元成長率を等値線を使って表わした。実験番号 (1), (2), (3), (4), (5), (6) は各々  $\Delta T=1, 3, 5, 10, 15, 20^\circ\text{C}$  に対応した  $Gr, Np$  の組をプロットした。



## 「5」 数値計算

数値計算は式 1、2 を直接解く差分法を基本とし、必要に応じて式 3、4、5 を解くスペクトル法の結果を比較した。図 8 a, b, c は差分法による熱伝導、安定対流、不安定対流領域の流速及び温度分布の典型的な時間発展パターンである。

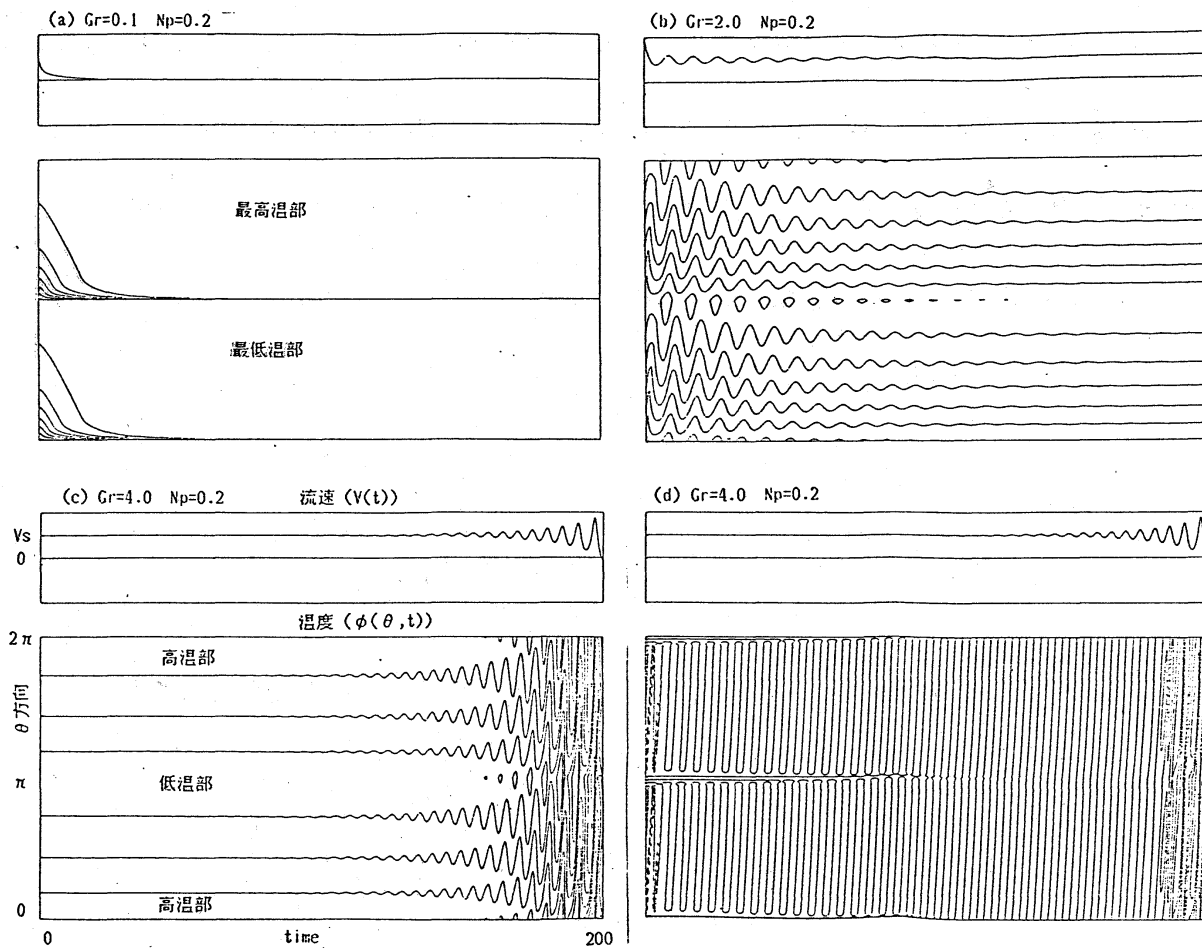


図8 典型的な時間発展パターン

(a), (b), (c) は各々、熱伝導、安定対流不安定対流領域に対応する流速の変動(上図)及び温度分布の変動を表す。初期条件は、(a), (b), (c) のいずれも  $Gr, Np$  の値に対応する定常解の温度分布を持ち、流速については定常解 ( $V_s$ ) の 1 倍、2 倍、1 倍としてある。なお(d)の温度分布は(c)のそれから初期温度分布を差し引いたものを表わしている。

図 8 d は c と同じ条件のもとで、不安定温度波動の成長と流

速変動の関係を示したものである。 $\theta$ 方向に波数1の温度波がほぼ主流と同じ速さで環に沿って伝播しながら成長しつつあるのが解る。

図9は主流の反転が起こる前後の温度分布の変動を詳しく見たものである。不安定温度波動が成長しその振幅が定常解の温度振幅と同じ程度になったとき、すなわち無次元温度 $\phi=0$ のラインが $\theta=2\pi$ にまで達したとき初めての主流の反転が起こっている。その後も無次元温度 $\phi=0$ のラインが $\theta$ のほぼ全領域を横切って伝播するときに主流の反転が起こっている。換言すれば温度波のオーバーシュートが主流の反転の鍵になっていると言える。

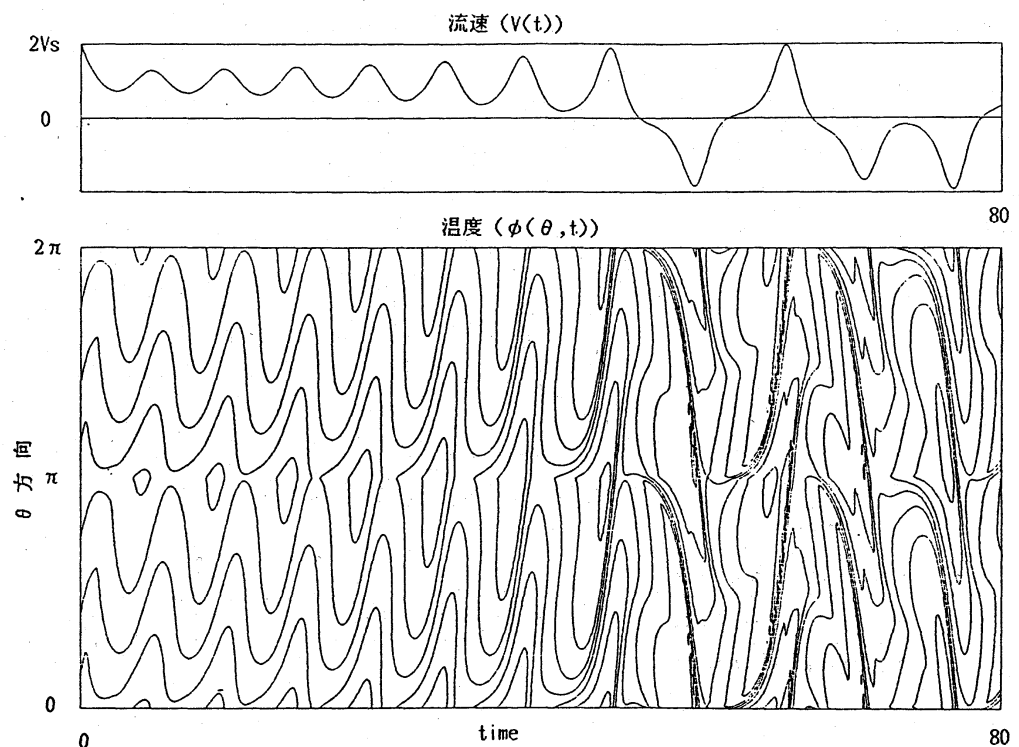


図9 主流の反転と温度波のオーバーシュート

3 節の実験結果において、環の水平温度差の符号をほぼ主流の向きと解釈したのは妥当であろう。

次に  $Gr$  と  $Np$  の値を様々に変化させて、初期温度分布は対応する定常解とし初速は定常解の 2 倍として時間発展を見た。計算時間の節約のためスペクトルモデルを用いて、 $Np$  については 0.1, 0.2, 0.3, 0.4 の 4 通り、 $Gr$  については 1 から 100 までの百通りを調べた。ここ

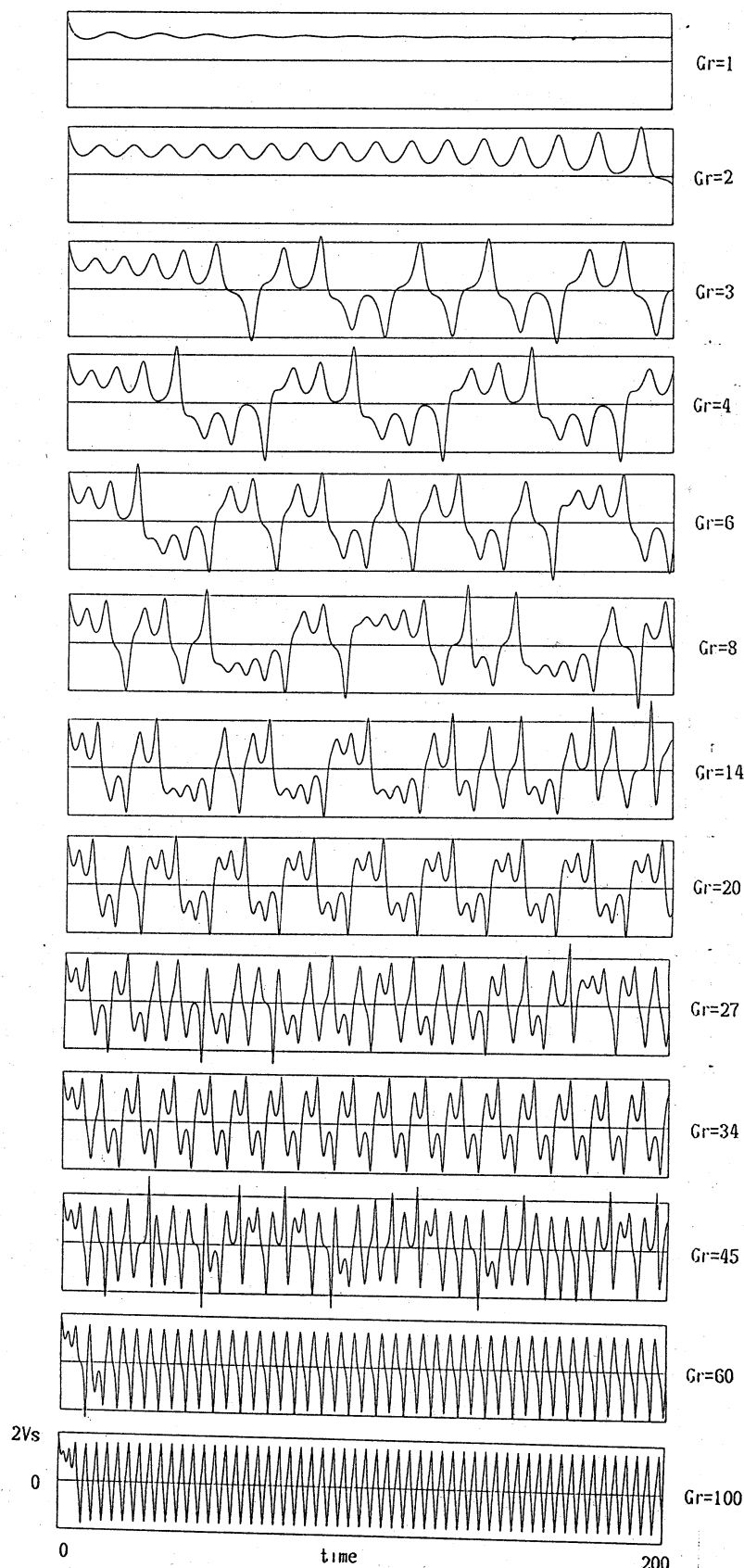


図10 流速の時間変化(カオス的変動と周期的変動)  
いずれの図も  $Np=0.2$  である。

では  $Np=0.1$  の場合について典型的な 13 種を図 10 に示す。

不安定対流領域にはカオス的な変動の他に  $Gr=4, 20, 34, 100$  のように幾種かの周期的な変動パターンのある事が解る。

次に  $Gr, Np$  の幾つかの組合せについて差分法による計算と比較して見た。カオス的な領域ではスペクトル法と差分法の結果は同じカオス的

ではあるが定量的には大きな不一致があった。しかしながら、図 11 a のように周期的な領域では、一部 ( $Gr=8$  の  $t=100$

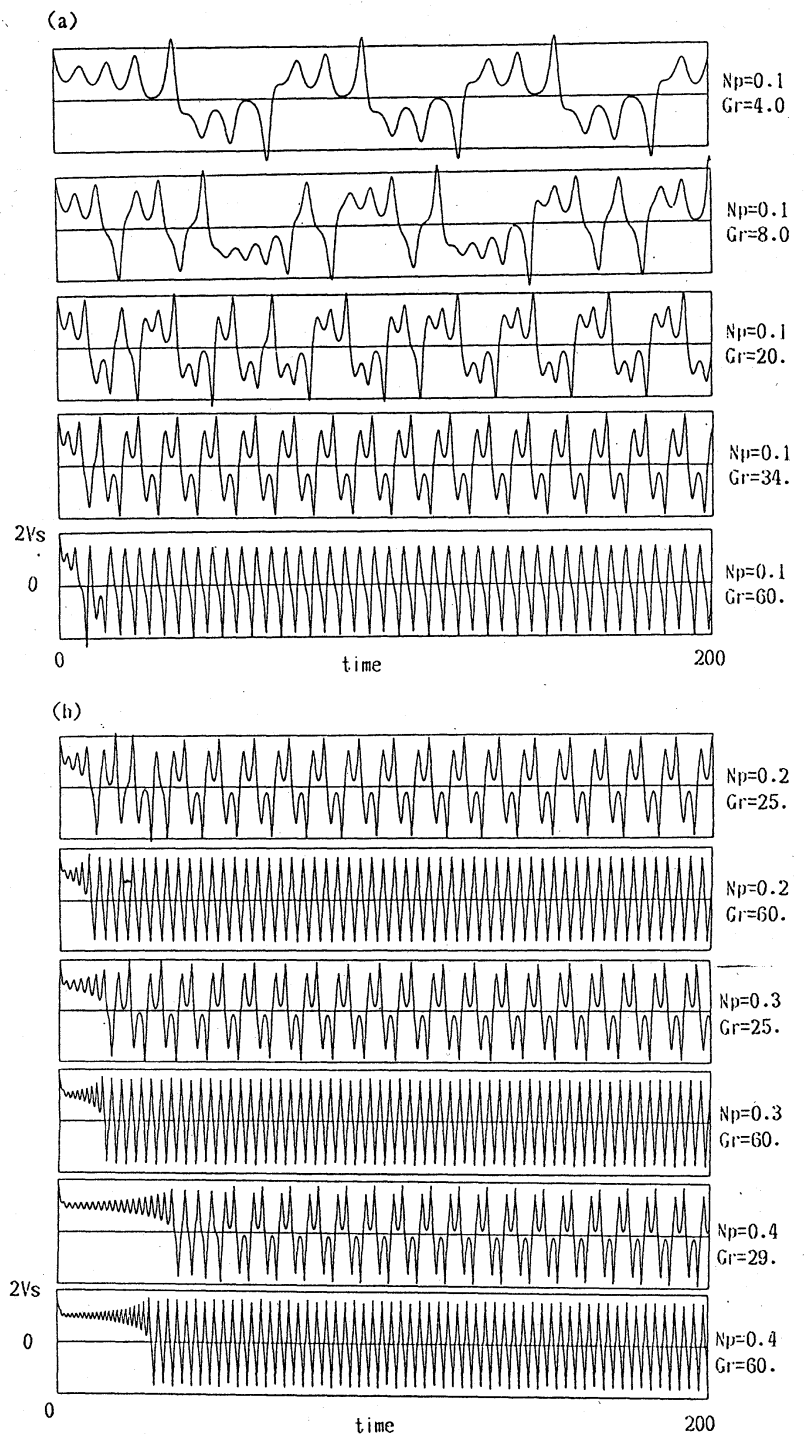


図 11 差分法による流速の時間変動

付近等)を除いて、良く一致する。

また、 $Np=0.1, Gr=34$  において見られたような主流の大きさが2回脈動する度に主流の向きが反転するパターンは  $Np$  の値が  $0.2, 0.3, 0.4$  の時にも計算法の種類によらず現われる(図11b参照)。さらに、 $Np=0.1, Gr=60$  において見られたように流速の極値が1回現われる毎に主流の向きが反転するパターンは  $Gr$  の値が60以上であれば  $Np$  の値に関わらず現われる(図11b参照)。従って、これらの変動の特徴は低次のスペクトル法にまつわる見かけのものではない。

## 「6」 まとめ

主流のカオス的反転の基本メカニズムはこの1次元モデルで表現されていると考えられる。しかし、比較的大きな  $Gr$  での周期的変動が室内実験においては観測されず、むしろ主流の反転が抑制されているように見えることについては2次元モデルによる調査が必要であろう。

## (参考文献)

- Sano, o. and T. Wakayama, 1989: J.Phys.Soc.Jpn., 56.
- 須田不二夫、三村和男、1989:日本伝熱シンポ論文集(26)。
- Yorke, J. and E.D.Yorke, 1981: Hydrodynamic stability and the transition to turbulence (Springer Chap.4).